TS 04-05 Eléments de correction de la Formative 1

1. La fonction f est définie pour les valeurs de x telles que $x^2-4x+8 \geq 0$. Le discriminant du trinôme x^2-4x+8 étant négatif, celui-ci ne s'annule pas et garde un signe constant sur $\mathbb{R}$, celui du coefficient de x^2.

2. La fonction f est une fonction composée : $x \longmapsto x^2-4x+8$
$$X \longmapsto \sqrt{X}$$
En $+\infty$ et en $-\infty$ le trinôme x^2-4x+8 a même limite que son terme de plus haut degré : $\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} x^2=+\infty$
Comme $\lim_{X\to+\infty} \sqrt{X}=+\infty$, par composition, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

3. $f=v\circ u$ avec, u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=x^2-4x+8$, u dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $]0\,;+\infty[$ car $u(x)>0$
et v définie sur $]0\,;+\infty[$ par $v(X)=\sqrt{X}$, dérivable sur $]0\,;+\infty[$.
D'après le théorème sur la dérivation d'une fonction composée $f=v\circ u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et, pour tout x réel,
$f'(x)=\dfrac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+8}}=\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+8}}$, du signe de $x-2$ car $\sqrt{x^2-4x+8}>0$ sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f'(x)		$-$	0	$+$	
Variation de f	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

4. Pour démontrer que la droite (Δ) d'équation x= 2 est un axe de symétrie pour la courbe (C), il suffit de démontrer que **pour tout h réel tel que $2+h\in D_f$ et $2-h\in D_f$,** (condition réalisée car le domaine de définition de f, D_f, est bien symétrique par rapport à 2) **et que $f(2-h)=f(2+h)$**
Or $f(2-h)=\sqrt{(2-h)^2-4(2-h)+8}=\sqrt{h^2+4}$ et $f(2+h)=\sqrt{(2+h)^2-4(2+h)+8}=\sqrt{h^2+4}$ donc $f(2-h)=f(2+h)$

5. a)**Si $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-2)]=0$ alors la droite d'équation $y=x-2$ est asymptote à C_f en $+\infty$.**
Pour calculer $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-2)]$ on utilise la quantité conjuguée :
$$f(x)-(x-2)=\frac{x^2-4x+8-(x-2)^2}{\sqrt{x^2-4x+8}+(x-2)}=\frac{4}{\sqrt{x^2-4x+8}+(x-2)}.$$
Or, $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-4x+8}=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}(x-2)=+\infty$ donc par somme $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-4x+8}+(x-2)=+\infty$ et par quotient, $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{4}{\sqrt{x^2-4x+8}+(x-2)}=0$.
Donc $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-2)]=0$, et la droite (D) d'équation $y=x-2$ est asymptote à C_f en $+\infty$.

b) La position de (C) par rapport à (D) se déduit du signe de $f(x)-(x-2)=\sqrt{x^2-4x+8}-(x-2)$
Pour tout $x\leq 2$, $x-2\leq 0$ et $-(x-2)\geq 0$ donc $\sqrt{x^2-4x+8}-(x-2)>0$
Pour tout $x\geq 2$, $\sqrt{x^2-4x+8}$ et $(x-2)$ sont deux réels positifs, dans le même ordre que leurs carrés
$\sqrt{x^2-4x+8}=x^2-4x+8$ et $(x-2)^2=x^2-4x+4$ donc $\sqrt{x^2-4x+8}>x-2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-4x+8}-(x-2)>0$.
Donc pour tout x réel, (C) est au-dessus de (D).

6. (C) admet une tangente horizontale au point A (2,2) car $f'(2)=0$.
La droite (D) d'équation $y=x-2$ est asymptote à C_f en $+\infty$.Comme la droite (Δ) d'équation $x=2$ est un axe de symétrie pour la courbe (C), en $-\infty$ la courbe (C) admet aussi une asymptote oblique : la droite (D') symétrique de (D) par rapport à (Δ), passant par le point B (2,0) et de coefficient directeur égal à -1, d'équation $y=-x+2$.

7. Limites de f ' en $+\infty$ et en $-\infty$ avec $f'(x)=\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+8}}$

$\lim_{x \to +\infty} x - 2 = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 4x + 8} = +\infty$ donc les opérations sur les limites ne permettent pas de conclure.

Pour $x \neq 0$, $x^2 - 4x + 8 = x^2 \left(1 - \frac{4}{x} + \frac{8}{x^2} \right)$ donc $f'(x) = \dfrac{x\left(1 - \frac{2}{x}\right)}{\sqrt{x^2}\sqrt{\left(1 - \frac{4}{x} + \frac{8}{x^2}\right)}}$

Rappel : $\boldsymbol{\sqrt{x^2} = |x|}$ **et** $\boldsymbol{|x| = x}$ **si** $\boldsymbol{x \geq 0}$ **;** $\boldsymbol{|x| = -x}$ **si** $\boldsymbol{x \leq 0}$

Donc pour $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{x\left(1 - \frac{2}{x}\right)}{x\sqrt{\left(1 - \frac{4}{x} + \frac{8}{x^2}\right)}} = \dfrac{\left(1 - \frac{2}{x}\right)}{\sqrt{\left(1 - \frac{4}{x} + \frac{8}{x^2}\right)}}$ et d'après les opérations sur les limites

$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 1$ et pour $x < 0$, $f'(x) = \dfrac{x\left(1 - \frac{2}{x}\right)}{-x\sqrt{\left(1 - \frac{4}{x} + \frac{8}{x^2}\right)}} = \dfrac{\left(1 - \frac{2}{x}\right)}{-\sqrt{\left(1 - \frac{4}{x} + \frac{8}{x^2}\right)}}$ et de même $\lim_{x \to -\infty} f'(x) = -1$.

Ces résultats sont bien en accord avec l'existence de droites asymptotes à (C) de coefficients directeurs égaux respectivement à 1 en $+\infty$ et -1 en $-\infty$.